Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Malgorzata Wesolowska

Utbildningskod: 764G07
Modul: TEN1

Matematisk analys del1
Facit
2024-05-03, kl 14.00-19.00

1. (Notera att lösningsskisserna nedan är just skisser och inte fullständiga lösningar.)

Låt $z = a + bi$, där $a, b \in \Re$. Då blir ekvationen

$$(1+3i)z + (1-2i)\bar{z} = -3 + i \Leftrightarrow (1+3i)(a+bi) + (1-2i)(a-bi) = -3 + i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [fyll\ i] \Leftrightarrow (2a-5b) + ai = -3 + i$$

Likheten gäller endast om $\begin{cases} 2a - 5b = -3 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow [fyll\ i] \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

som efter insättningen av respektive i $z = a + bi$

ger sökta lösningen $z = 1 + i$.

Svar: $z = 1 + i$

2. (Notera att lösningsskisserna nedan är just skisser och inte fullständiga lösningar.)

Trigonometriska ettan $sin^2x = 1 - cos^2x$ ger ekvationen $cosx(sinx - cosx) = 0$ som har lösningarna

$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$.

Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ där $n \in \mathbb{Z}$.

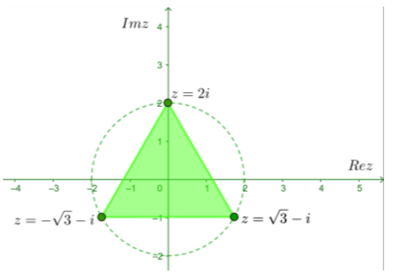
3. (Notera att lösningsskisserna nedan är just skisser och inte fullständiga lösningar.)

Omskrivning till polär form ger

$z^3 = -8i \Leftrightarrow (re^{\varphi i})^3 = 8e^{\frac{3\pi}{2}i} \Leftrightarrow r^3e^{3\varphi i} = 8e^{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)i}$ likheten gäller endast om

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\varphi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ k = 0,1,2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}k, \ k = 0,1,2 \end{cases}$$

För respektive k fås följande lösningar : $z = 2i$ eller $z = -\sqrt{3} - i$ eller $z = \sqrt{3} - i$.



Triangelns area blir därmed $A = \frac{basen \cdot höjden}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = 3\sqrt{3}$ a.e.

Svar: Triangelns area är $3\sqrt{3}$ a.e.

4. (Notera att lösningsskisserna nedan är just skisser och inte fullständiga lösningar.)

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)}=\frac{1\cdot(1-1)}{1+1}=0$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-(x^2-2x)\right)}{\left(x+\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=\left[\begin{matrix}OBS!\\ \sqrt{x^2}=|x|\end{matrix}\right]=$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(x+|x|\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=[x>0\Rightarrow|x|=x]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=$

$=\left[\frac{2}{x}\to 0 \text{ då } x\to\infty\right]=\frac{2}{(1+\sqrt{1-0})}=1$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{\tan x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot 3x\right)^2}{\frac{\sin x^2}{\cos x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^2\cdot 9x^2\cdot\frac{\cos x^2}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^2\cdot 9x^2\cdot\frac{\cos x^2}{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x^2}=$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)^2\cdot 9\cdot\frac{\cos x^2}{\frac{\sin x^2}{x^2}}=\left[\begin{matrix}\text{enligt } \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\\ \text{och}\\ \cos \text{ är kontinuerlig}\end{matrix}\right]=1^2\cdot 9\cdot\frac{\cos 0}{1}=9$

Svar: a) 0 b) 1 c) 9

5. (Notera att lösningsskisserna nedan är just skisser och inte fullständiga lösningar.)

f är definierad då $x\neq -2$. Standardberäkningar (som du måste göra!) ger $f'(x)=\frac{2x+3}{(x+2)^2}e^{2x}$.

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2}e^{2x}=\left[\begin{matrix}x+2\to 0^+\\ \frac{1}{x+2}\to+\infty\end{matrix}\right]=+\infty\cdot e^{-4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x+2}e^{2x}=\left[\begin{matrix}x+2\to 0^-\\ \frac{1}{x+2}\to-\infty\end{matrix}\right]=-\infty\cdot e^{-4}=-\infty$$

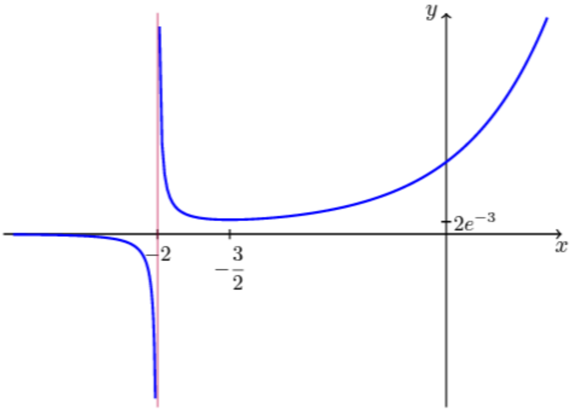
$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x+2}e^{2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{xe^{-2x}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\left[\begin{matrix}xe^{-2x}\to-\infty\\ \frac{1}{xe^{-2x}}\to 0^-\\ \frac{2}{x}\to 0^-\end{matrix}\right]=0\cdot\frac{1}{(1+0)}=0(=0^-)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x+2}e^{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x}}{2x}\cdot\frac{2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\left[\begin{matrix}\frac{e^{2x}}{2x}\to+\infty\\ \frac{2}{x}\to 0^+\end{matrix}\right]=+\infty\cdot\frac{2}{(1+0)}=+\infty$$

Teckentabell:

x		-2		$-\frac{3}{2}$	
e^{2x}	$+$		$+$		$+$
$2x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	
$f(x)$	↘	ej def.	↘	lok. min.	↗

Vidare $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2e^{-3}$. Detta ger grafen



Direkt avläsning i denna ger $V_f =]-\infty, 0[\cup [2e^{-3}, +\infty[$.

Svar: Graf enligt ovan. Linjen $x = -2$ är en lodrät asymptot. Linjen $y = 0$ är en horisontell asymptot då $x \to -\infty$. f har en lokal minimipunkt i $x = -\frac{3}{2}$ (med lokala minimivärdet $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2e^{-3}$) och $V_f =]-\infty, 0[\cup [2e^{-3}, +\infty[$.

6. (Notera att lösningsskisserna nedan är just skisser och inte fullständiga lösningar.)

Vi studerar funktionen $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. $f`(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$
där $f`(x) = 0 \Longrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \pm 1$.

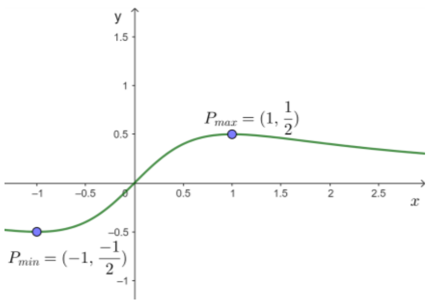
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = 0 \cdot \frac{1}{(0+1)} = 0(=0^+)$$

På motsvarande sätt visas att

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0(=0^-)$$

Teckentabellen och grafen blir

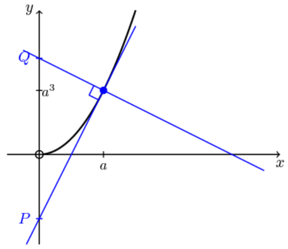
x		-1		1	
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$1+x$	$-$	0	$+$		$+$
$(1+x^2)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘



Svar: Ingen lösning om $\frac{-1}{2} > a$ eller $a > \frac{1}{2}$, två lösningar om $a \epsilon \left]\frac{-1}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{2}\right[$,
en lösning om $a = 0$ och $a = \pm\frac{1}{2}$.

7. (Notera att lösningsskisserna nedan är just skisser och inte fullständiga lösningar.)

Låt (a, a^3) vara en godtyckligt punkt på den givna kurvan. Figur:



Tangenten till kurvan i punkten (a, a^3) får ekvationen $y - a^3 = 3a^2(x - a) \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3$ och skär y −axeln i $P = (0, -2a^3)$. Normalen till kurvan i samma punkt är vinkelrät mot tangenten och har riktningskoefficienten $-\frac{1}{3a^2}$ vilket ger ekvationen $y - a^3 = -\frac{1}{3a^2}(x - a) \Leftrightarrow y = a^3 + \frac{1}{3a} - \frac{1}{3a^2}x$ och skärningspunkten $Q = \left(0, a^3 + \frac{1}{3a}\right)$ med y −axeln.

Låt $f(a)$ vara längden av sträckan PQ, d.v.s. $f(a) = a^3 + \frac{1}{3a} - (-2a^3) = \ldots = \frac{9a^4+1}{3a}, a > 0$.
Vi söker den/de punkter där f antar sitt minsta värde (om ett sådant finns). Derivering ger
$f'(a) = \frac{27a^4-1}{3a^2}$, så $f'(a) < 0$ om $0 < a < 3^{-3/4}$, $f'(a) = 0$ om $a = 3^{-3/4}$ och $f'(a) > 0$ om $a > 3^{-3/4}$.
f är alltså strängt avtagande på $\left]0, 3^{-3/4}\right]$ och strängt växande på $\left[3^{-3/4}, \infty\right[$ vilket visar att punkterna P och Q hamnar närmast varandra då $a = 3^{-3/4}$.

Det minimla avståndet mellan P och Q blir då $f\left(3^{-3/4}\right) = \frac{9\cdot\left(3^{-3/4}\right)^4+1}{3\cdot\left(3^{-3/4}\right)} = \frac{4}{3\sqrt[4]{3}}$

Tangeringspunktens koordinater bli då $(a, a^3) = \left(3^{-3/4}, \left(3^{-3/4}\right)^3\right) = \left(3^{-3/4}, 3^{-9/4}\right)$.

Svar: Punkterna hamnar så nära varandra som möjligt om punkten på kurvan är $\left(3^{-3/4}, 3^{-9/4}\right)$.